Update on classical and general closures from moment approach

Jeong-Young Ji and Eric D. Held

Department of Physics, Utah State University

NIRMOD Team Meeting at APS-DPP

November 15, 2008

Closure problem

- Maxwell's equations: $\rho,\ \mathbf{J} \Leftarrow n_a,\ \mathbf{V}_a$
- 5 moment equations:

$$d_a n_a + n_a \nabla \cdot \mathbf{V}_a = 0$$

$$\frac{3}{2} n_a d_a T_a + n_a T_a \nabla \cdot \mathbf{V}_a + \nabla \cdot \mathbf{q}_a + \nabla \mathbf{V}_a : \boldsymbol{\pi}_a = Q_a$$

$$m_a n_a d_a \mathbf{V}_a - n_a e_a (\mathbf{E} + \mathbf{V}_a \times \mathbf{B}) + \nabla p_a + \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_a = \mathbf{R}_a$$

where $d_a \equiv \partial/\partial t + \mathbf{V}_a \cdot \nabla$

- Closure equations: express $\{\mathbf{q}_a,\ \boldsymbol{\pi}_a,\ Q_a,\ \mathbf{R}_a\}$ in terms of $\{n_a, \mathbf{V}_a, T_a\}$

Braginskii closures

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_\mathrm{e} &= -\alpha_\parallel \mathbf{V}_{\mathrm{ei}\parallel} - \alpha_\perp \mathbf{V}_{\mathrm{ei}\perp} + \alpha_\times \mathbf{V}_{\mathrm{ei}\times} \\
&\quad -\beta_\parallel \nabla_\parallel T_\mathrm{e} - \beta_\perp \nabla_\perp T_\mathrm{e} - \beta_\times \nabla_\times T_\mathrm{e} = -\mathbf{R}_\mathrm{i} \\
Q_\mathrm{e} &= 3\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{i}}\frac{n_\mathrm{e}}{\tau_\mathrm{ei}}(T_\mathrm{i} - T_\mathrm{e}) - \mathbf{V}_\mathrm{ei} \cdot \mathbf{R}_\mathrm{e} = -Q_\mathrm{i} \\
\mathbf{q}_\mathrm{e} &= \beta_\parallel T_\mathrm{e} \mathbf{V}_{\mathrm{ei}\parallel} + \beta_\perp T_\mathrm{e} \mathbf{V}_{\mathrm{ei}\perp} + \beta_\times T_\mathrm{e} \mathbf{V}_{\mathrm{ei}\times} \\
&\quad -\kappa^\mathrm{e}_\parallel \nabla_\parallel T_\mathrm{e} - \kappa^\mathrm{e}_\perp \nabla_\perp T_\mathrm{e} - \kappa^\mathrm{e}_\times \nabla_\times T_\mathrm{e} \\
\boldsymbol{\pi}_\mathrm{e} &= -\eta^\mathrm{e}_0 \mathsf{W}^\mathrm{e}_0 - \eta^\mathrm{e}_1 \mathsf{W}^\mathrm{e}_1 - \eta^\mathrm{e}_2 \mathsf{W}^\mathrm{e}_2 - \eta^\mathrm{e}_3 \mathsf{W}^\mathrm{e}_3 - \eta^\mathrm{e}_4 \mathsf{W}^\mathrm{e}_4 \\
\mathbf{q}_\mathrm{i} &= -\kappa^\mathrm{i}_\parallel \nabla_\parallel T_\mathrm{i} - \kappa^\mathrm{i}_\perp \nabla_\perp T_\mathrm{i} + \kappa^\mathrm{i}_\times \nabla_\times T_\mathrm{i} \\
\boldsymbol{\pi}_\mathrm{i} &= -\eta^\mathrm{i}_0 \mathsf{W}^\mathrm{i}_0 - \eta^\mathrm{i}_1 \mathsf{W}^\mathrm{i}_1 - \eta^\mathrm{i}_2 \mathsf{W}^\mathrm{i}_2 + \eta^\mathrm{i}_3 \mathsf{W}^\mathrm{i}_3 + \eta^\mathrm{i}_4 \mathsf{W}^\mathrm{i}_4
\end{aligned}
$$

Moment expansion of a distribution function

- Landau kinetic equation

$$\partial_t f_a + \mathbf{v}\cdot\nabla f_a + \frac{e_a}{m_a}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\partial_{\mathbf{v}} f_a = \sum_b C(f_a, f_b)$$

- Moment expansion

$$f_a(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = f_a^{\mathrm{M}} \sum_{lk} \frac{1}{\sqrt{\sigma_k^l}} \mathsf{m}_a^{lk}(t,\mathbf{x}) \cdot \mathsf{p}_a^{lk}$$

$$\mathsf{n}_a^{lk} \equiv n_a \mathsf{m}_a^{lk}(t,\mathbf{x}) = \int d\mathbf{v} \frac{1}{\sqrt{\sigma_k^l}} \mathsf{p}_a^{lk} f_a(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$$

Moment equations

- Ji and Held, PoP **13**, 102103 (2006); **15**, 102101 (2008)

$$D \begin{pmatrix} \mathsf{n}^0 \\ \mathsf{n}^1 \\ \mathsf{n}^2 \\ \vdots \end{pmatrix} + \Omega \mathbf{b} \wedge \begin{pmatrix} \mathsf{n}^0 \\ \mathsf{n}^1 \\ \mathsf{n}^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \mathsf{n}^0 \\ \mathsf{n}^1 \\ \mathsf{n}^2 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{g}^1 \\ \mathsf{g}^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{n}^0 = (\mathsf{n}^{02}, \mathsf{n}^{03}, \cdots), \ \mathsf{n}^1 = (\mathsf{n}^{11}, \mathsf{n}^{12}, \cdots), \ \mathsf{n}^2 = (\mathsf{n}^{20}, \mathsf{n}^{21}, \cdots)$$

$$\mathsf{g}^1 = (\nabla T, 0, 0, \cdots) + (a_0 \mathbf{V}_{\mathrm{ei}}, \ a_1 \mathbf{V}_{\mathrm{ei}}, \cdots)_{\mathrm{e}}, \ \mathbf{V}_{\mathrm{ei}} = \mathbf{V}_{\mathrm{e}} - \mathbf{V}_{\mathrm{i}}$$

$$\mathsf{g}^2 = (\mathsf{W}, 0, 0, \cdots), \ \mathsf{W} = \nabla \mathbf{V} + \widetilde{\nabla \mathbf{V}} - \frac{2}{3} \mathsf{I} \nabla \cdot \mathbf{V}$$

- For uniform plasmas: CP6.00042 (2:00 PM, Monday)

Geometric method

- For vectors

$$
\begin{aligned}
\mathsf{b}_0 \mathbf{A} &= \mathsf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \\
\mathsf{b}_\parallel \mathbf{A} &= \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_\parallel \\
\mathsf{b}_\times \mathbf{A} &= \mathbf{b} \times \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_\times \\
\mathsf{b}_\perp \mathbf{A} &= -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{A}) \\
&\equiv \mathbf{A}_\perp
\end{aligned}
$$

- Composition rules

$$
\begin{aligned}
\mathsf{b}_\parallel \mathsf{b}_\parallel &= \mathsf{b}_\parallel \\
\mathsf{b}_\times \mathsf{b}_\times &= -\mathsf{b}_\perp \\
\mathsf{b}_\perp \mathsf{b}_\perp &= \mathsf{b}_\perp \\
\mathsf{b}_\parallel \mathsf{b}_\times &= \mathsf{b}_\times \mathsf{b}_\parallel = 0 \\
\mathsf{b}_\parallel \mathsf{b}_\perp &= \mathsf{b}_\perp \mathsf{b}_\parallel = 0 \\
\mathsf{b}_\times \mathsf{b}_\perp &= \mathsf{b}_\perp \mathsf{b}_\times = \mathsf{b}_\times
\end{aligned}
$$

Geometric method (cont.)

- For tensors

$$\mathsf{b}_{A_1\cdots A_l} \;=\; \mathsf{b}_{\{A_1} \otimes \mathsf{b}_{A_2} \otimes \cdots \otimes \mathsf{b}_{A_l\}}$$

$$\mathsf{b}_{\parallel\times\times} = \frac{1}{3}(\mathsf{b}_{\parallel} \otimes \mathsf{b}_{\times} \otimes \mathsf{b}_{\times} + \mathsf{b}_{\times} \otimes \mathsf{b}_{\parallel} \otimes \mathsf{b}_{\times} + \mathsf{b}_{\times} \otimes \mathsf{b}_{\times} \otimes \mathsf{b}_{\parallel})$$

$$\mathbf{b} \wedge \mathsf{n}^{l} = l\mathsf{b}_{\times 0\cdots 0}\mathsf{n}^{l}$$

$$\mathbf{b} \wedge \mathsf{n}^{2} = 2\mathsf{b}_{\times 0} = (\mathsf{b}_{\times} \otimes \mathsf{b}_{0} + \mathsf{b}_{0} \otimes \mathsf{b}_{\times})\mathsf{n}^{2} = \mathbf{b} \times \mathsf{n}^{2} - \mathsf{n}^{2} \times \mathbf{b}$$

- Geometric objects

$$\mathsf{n}^{lk}_{A_1\cdots A_l} = \mathsf{b}_{A_1\cdots A_l}\mathsf{n}^{lk}$$

$l = 1$ **moment equation**

- Vector equation (2×2)

$$\begin{pmatrix} x\mathbf{b} \times \mathsf{n}^{11} \\ x\mathbf{b} \times \mathsf{n}^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^1_{11} & c^1_{12} \\ c^1_{21} & c^1_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{n}^{11} \\ \mathsf{n}^{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathsf{g}^{11} \\ \mathsf{g}^{12} \end{pmatrix}$$

- Vector decomposition $\mathsf{n}^1 = \mathsf{n}^1_{\parallel} + \mathsf{n}^1_{\perp}$

$$\begin{aligned} \mathsf{n}^1_{\parallel} &= -(c^1)^{-1}\mathsf{g}^1_{\parallel} \\ \mathsf{n}^1_{\perp} &= -\frac{1}{(c^1)^2 + (x)^2}(x\mathsf{g}^1_{\times} + c^1\mathsf{g}^1_{\perp}) \end{aligned}$$

$l = 2$ moment equation

- Rank-2 tensor decomposition: $\mathsf{n}^2 = \mathsf{n}^2_{\parallel\parallel} + \mathsf{n}^2_{\parallel\perp} + \mathsf{n}^2_{\perp\parallel} + \mathsf{n}^2_{\perp\perp}$

$$\begin{aligned} \mathsf{n}^2_{\parallel\parallel} &= -(c^2)^{-1}\mathsf{g}^2_{\parallel\parallel} \\ \mathsf{n}^2_{\parallel\perp} &= -\frac{1}{(c^2)^2 + (x)^2}(x\mathsf{g}^2_{\parallel\times} + c^2\mathsf{g}^2_{\parallel\perp}) \end{aligned}$$

- $\mathsf{n}_\pm \equiv \frac{1}{2}(\mathsf{n}_{\perp\perp} \pm \mathsf{n}_{\times\times})$

$$\begin{aligned} \mathsf{n}^2_{+} &= -(c^2)^{-1}\mathsf{g}^2_{+} \\ \mathsf{n}^2_{-} &= -\frac{1}{(c^2)^2 + (2x)^2}(2x\mathsf{g}^2_{\times\perp} + c^2\mathsf{g}^2_{-}) \end{aligned}$$

Geometric meaning of Braginskii's $l = 2$ tensor

$$\mathsf{W}_0 = \mathsf{W}_{\parallel\parallel} + \frac{1}{2}(\mathsf{W}_{\times\times} + \mathsf{W}_{\perp\perp})$$

$$\mathsf{W}_1 = \frac{1}{2}(\mathsf{W}_{\perp\perp} - \mathsf{W}_{\times\times})$$

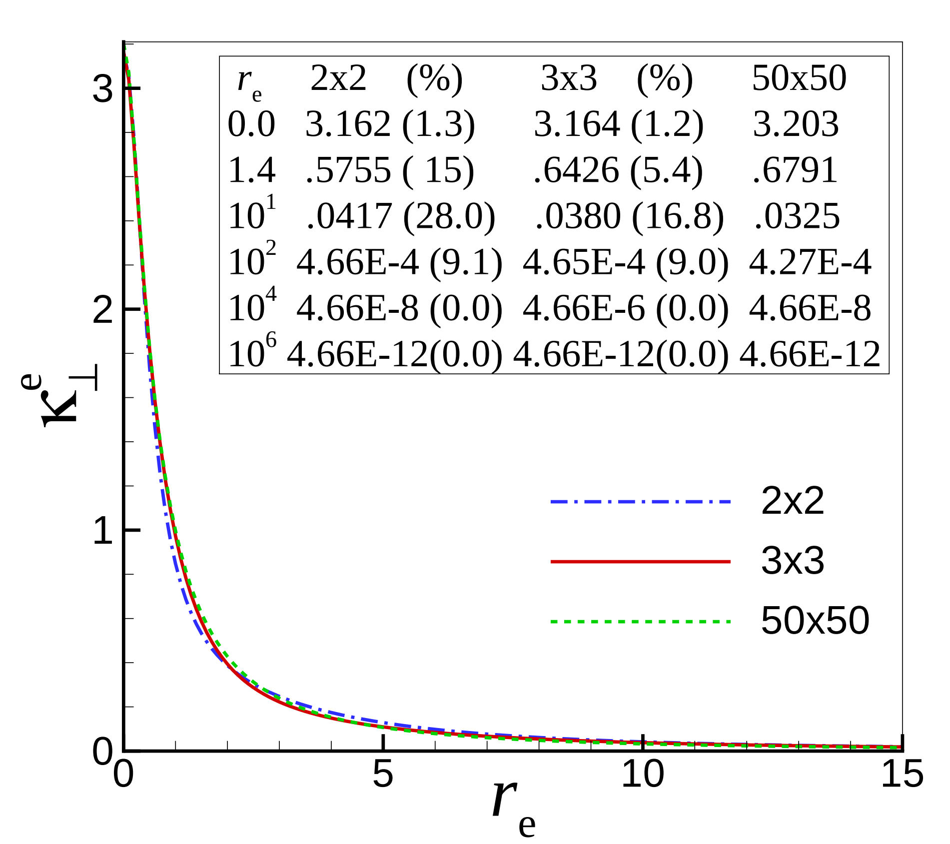
$$\mathsf{W}_2 = 2\mathsf{W}_{\parallel\perp}$$

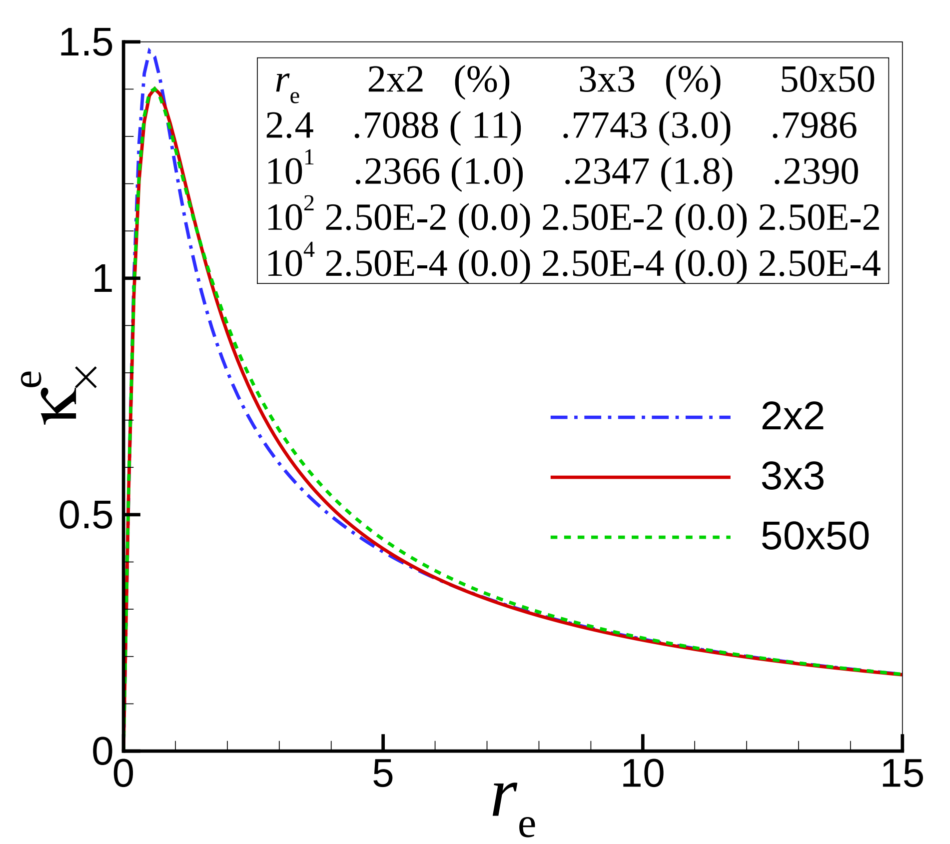
$$\mathsf{W}_3 = \mathsf{W}_{\times\perp}$$

$$\mathsf{W}_4 = 2\mathsf{W}_{\parallel\times}$$

Electron heat flow: ∇T

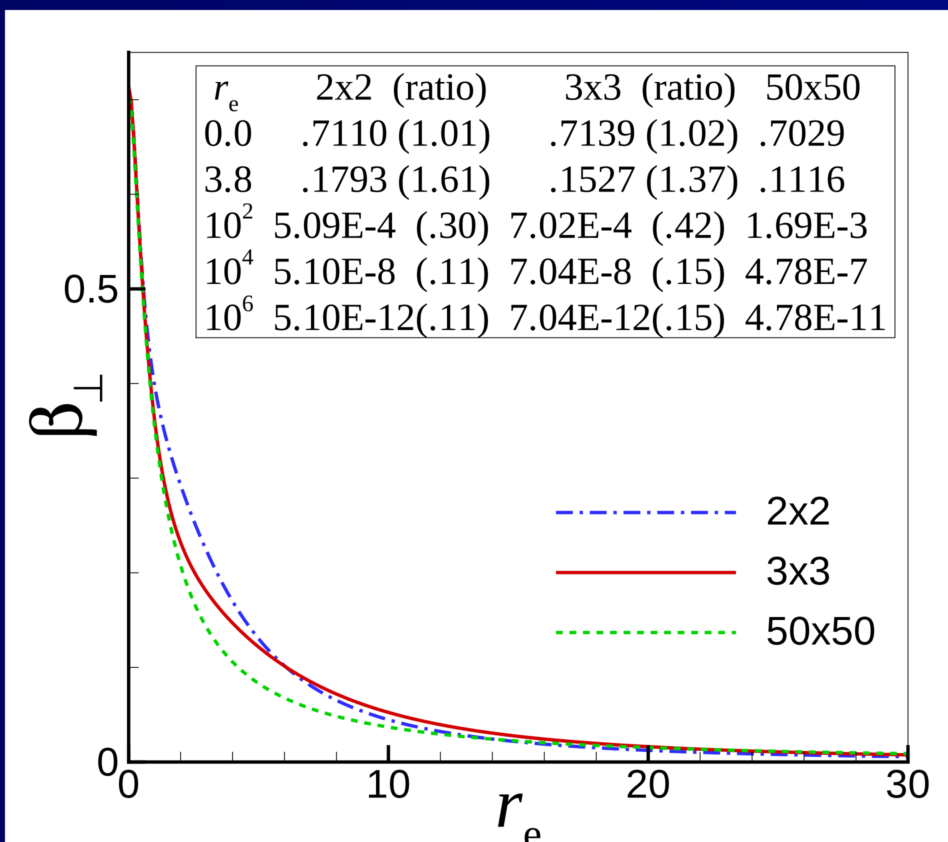
$$\mathbf{q}_{\mathrm{e}} = \sum_{A=\|,\perp,\times} -_{\times}\hat{\kappa}_{\mathrm{e}A}\frac{n_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} \tau_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}}\nabla_A T_{\mathrm{e}} + \hat{\beta}_A n_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} \mathbf{V}_{\mathrm{ei}A}$$

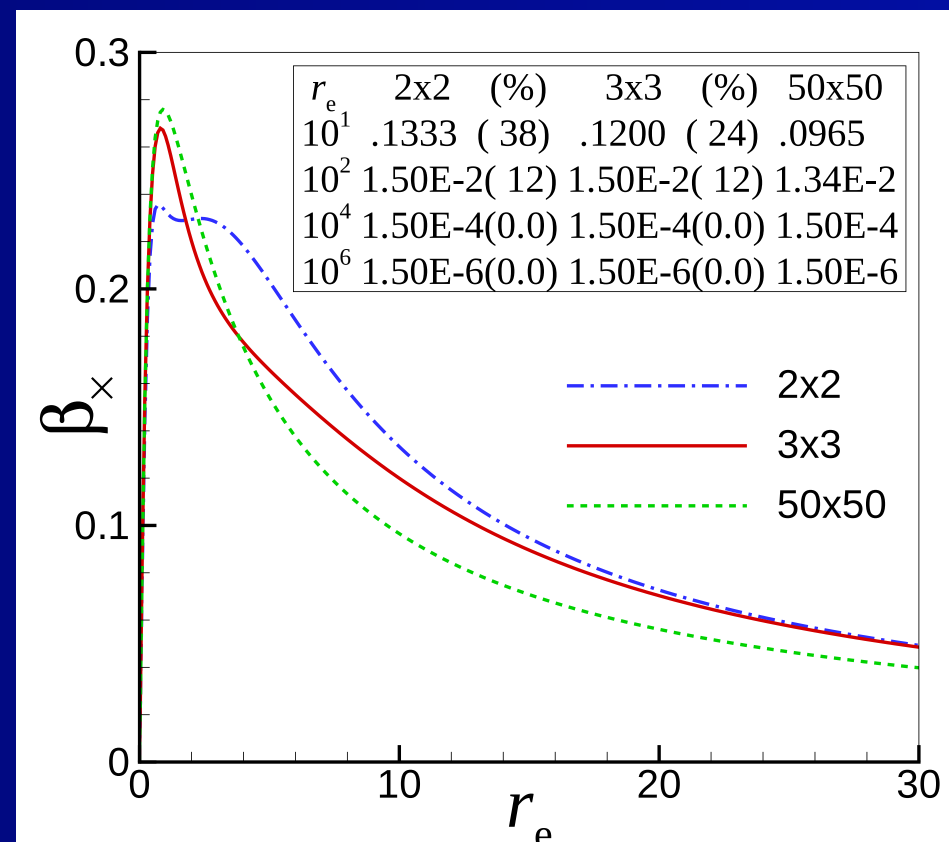




Electron heat flow: V_{ei}

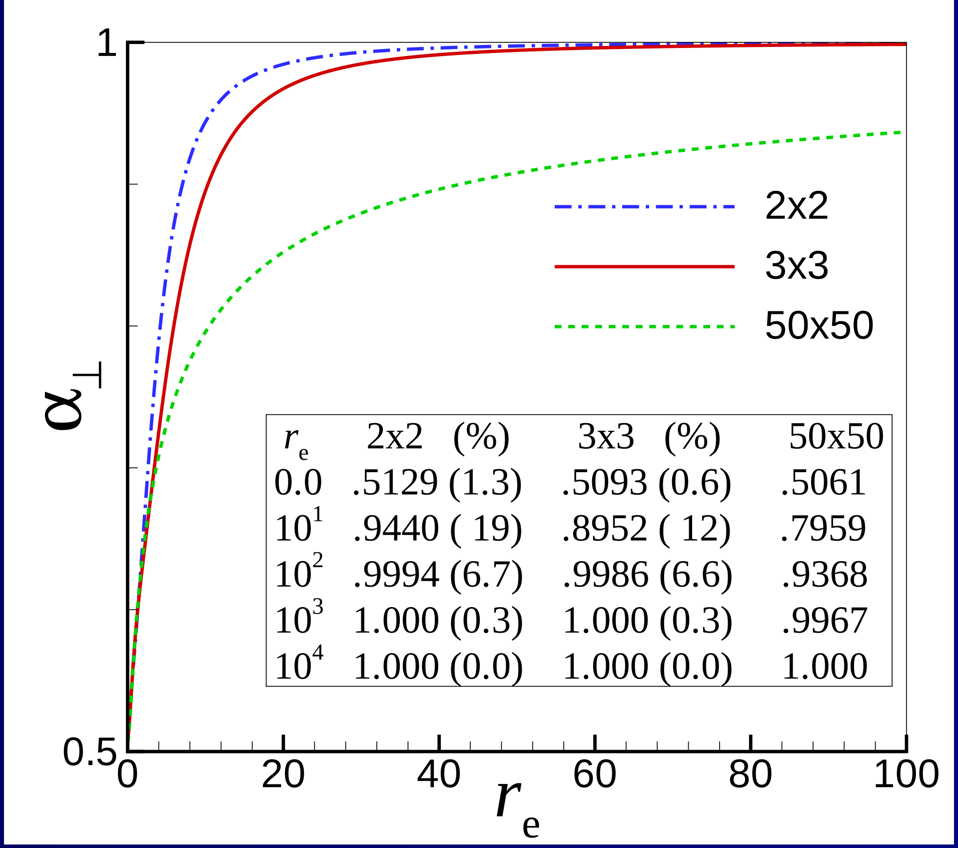
$$\mathbf{q}_{\mathrm{e}} = \sum_{A=\parallel,\perp,\times} -_{\times}\hat{\kappa}_{\mathrm{e}A}\frac{n_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{e}}\tau_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}}\nabla_A T_{\mathrm{e}} + \hat{\beta}_A n_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} \mathbf{V}_{\mathrm{ei}A}$$

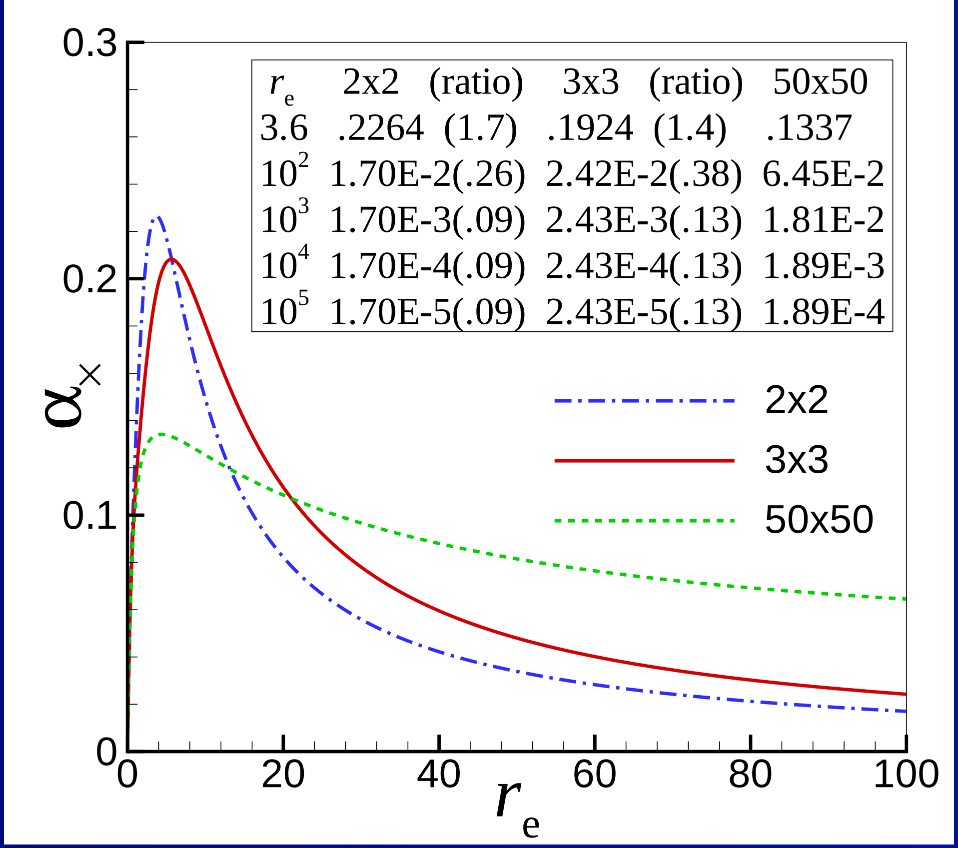




Collisional friction (force density)

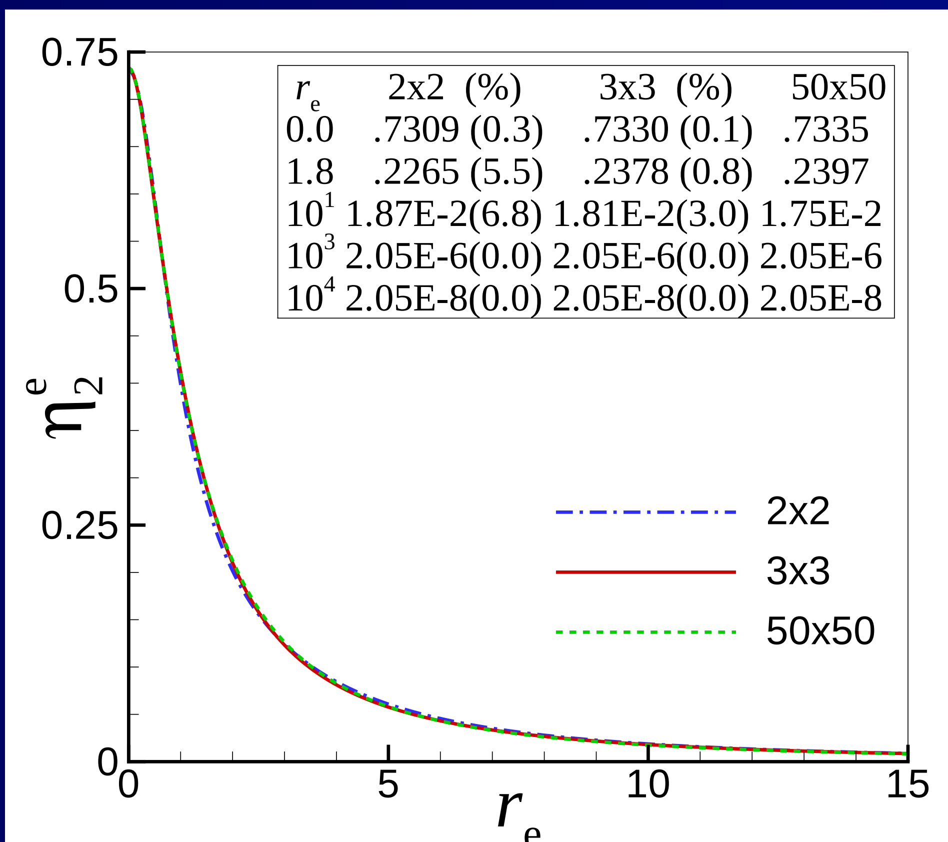
$$\mathbf{R}_\mathrm{e} = \sum_{A=\|,\perp,\times} -\hat{\beta}_A n_\mathrm{e} \nabla_A T_\mathrm{e} -_\times \hat{\alpha}_A \frac{m_\mathrm{e} n_\mathrm{e}}{\tau_\mathrm{ei}} \mathbf{V}_{\mathrm{ei}A}$$

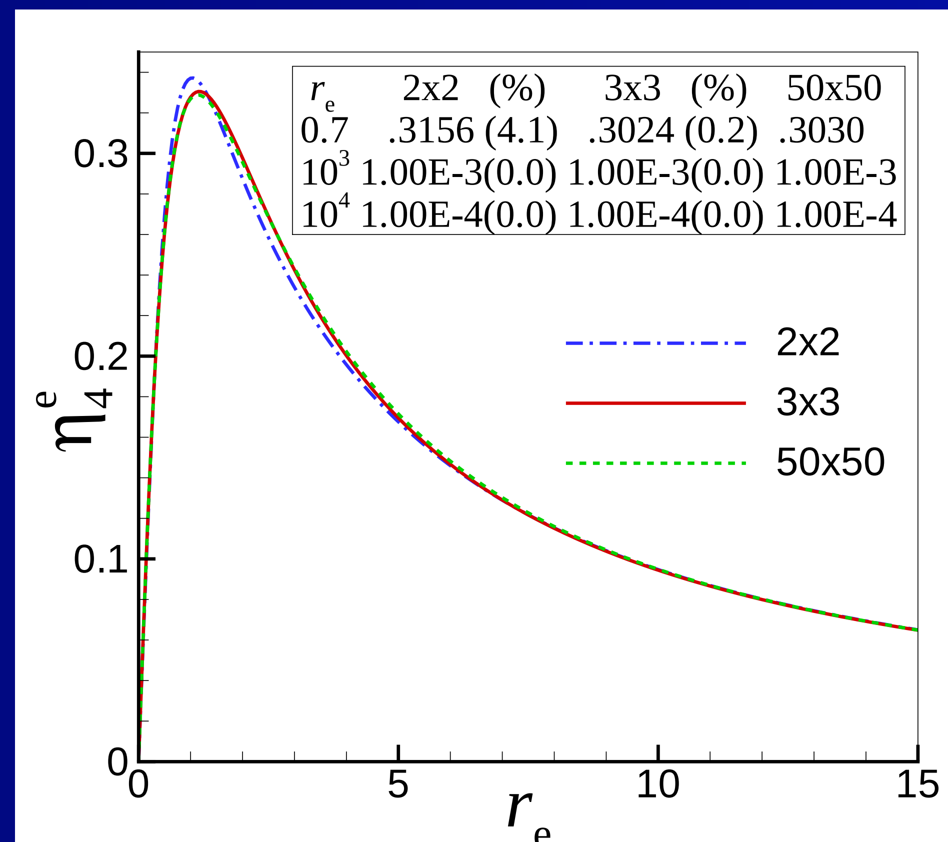




Electron viscous stress

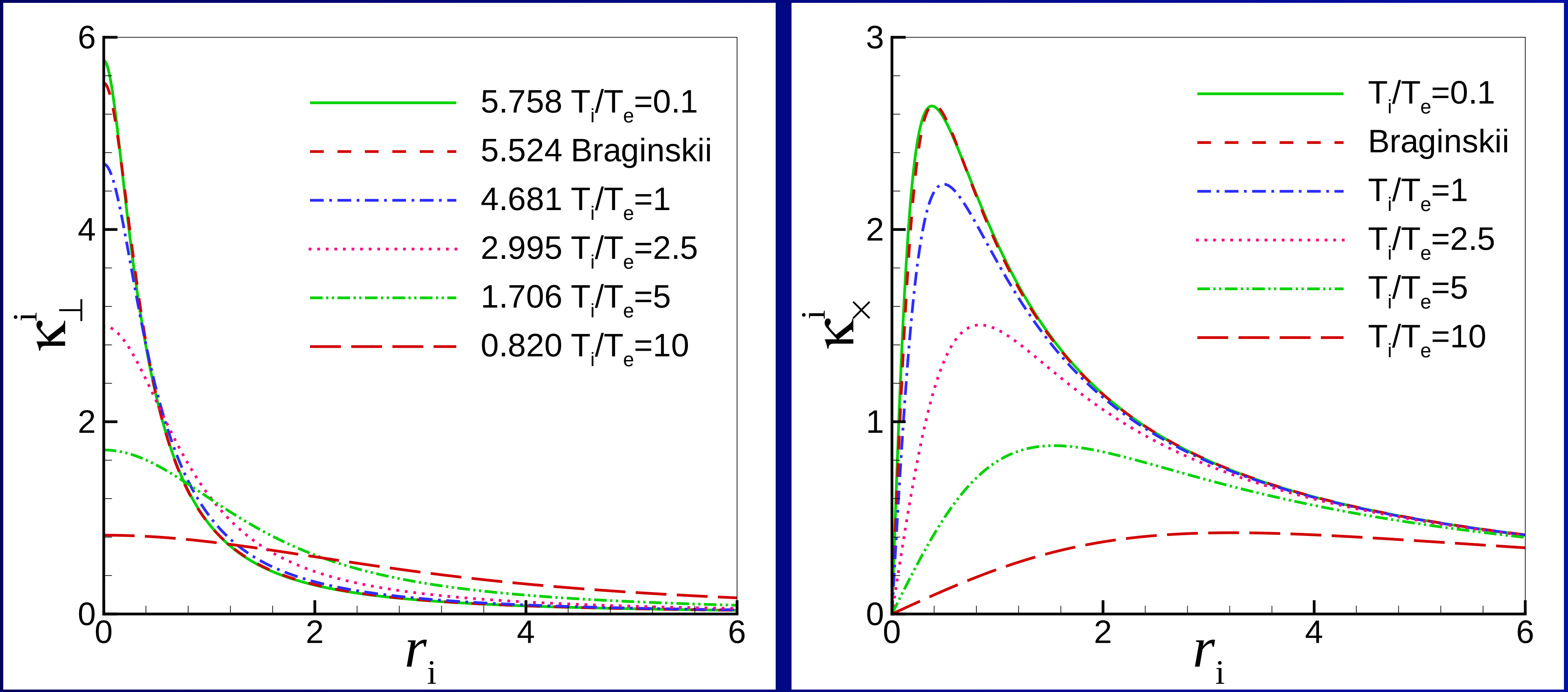
$$\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{e}} = -\sum_{A=0}^{4} \hat{\eta}_A^{\mathrm{e}} n_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} \tau_{\mathrm{e}} \mathsf{W}_A^{\mathrm{e}}$$





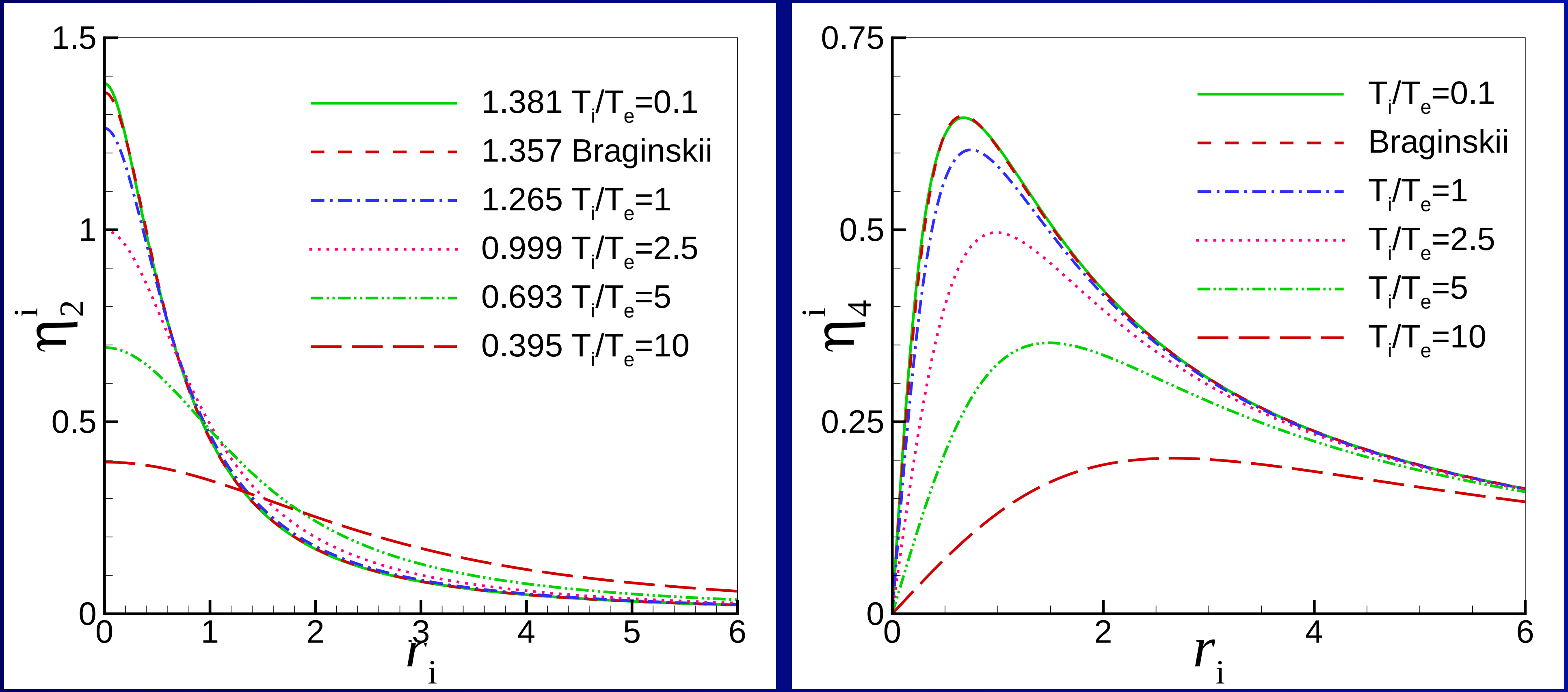
Ion heat flow

$$\mathbf{q}_\mathrm{i} = \sum_{A=\parallel,\perp,\times} -_\times \hat{\kappa}_{\mathrm{i}A} \frac{n_\mathrm{i} T_\mathrm{i} \tau_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \nabla_A T_\mathrm{i}$$ (3×3: 0.1% from 50×50)



Ion viscous stress

$$\boldsymbol{\pi}_{\rm i} = -_{3,4}\sum_{A=0}^{4}\hat{\eta}^{\rm i}_A n_{\rm i} T_{\rm i} \tau_{\rm i} \mathsf{W}^{\rm i}_A$$ (3 × 3: 0.1% from 50 × 50)



Solving moment equations for general collisionality in a strong magnetic field

- $\delta \equiv 1/x = \tau^{-1}/\Omega \ll 1$

$$\mathsf{n} = \mathsf{n}^{(0)} + \delta \mathsf{n}^{(1)} + \cdots$$

- δ^{-1} order

$$\mathbf{b} \wedge \mathsf{n}^{(0)} = 0$$

- δ^{0} order

$$D\mathsf{n}^{(0)} + \mathbf{b} \wedge \mathsf{n}^{(1)} = C\mathsf{n}^{(0)} + \mathsf{g}$$

Solution of δ^{-1} order equation: $\mathbf{b} \wedge \mathsf{n}^{l(0)} = 0$

- $l = 1$ vector: $\mathbf{b} \times \mathsf{n}^{1k} = 0$

$$\Rightarrow \mathsf{n}_{\perp}^{1k} = 0$$

- $l = 2$ tensor: $\mathbf{b} \wedge \mathsf{n}^{2k} = 0$

$$\mathsf{K}^{-1} = \tfrac{1}{2}\mathsf{b}_{\times\perp} + 2\mathsf{b}_{\parallel\times}$$

$$-\mathsf{K}^{-1}(\mathbf{b} \wedge \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{CGL}}$$

$$n_{\times\perp} = 0,\ \mathsf{n}_{\times\times} = \mathsf{n}_{\perp\perp} \Rightarrow n_{xx} = n_{yy} = -\tfrac{1}{2} n_{zz}$$

Solution of δ^{-1} order equation: $\mathrm{b} \wedge \mathsf{n}^{l(0)} = 0$ (cont.)

- L =number of $\times$ and $\perp$ parts in a geometric object

$$\mathsf{n}^{l}_{\underbrace{\|\cdots\|}_{l-L}\underbrace{\times\cdots\times}_{m}\underbrace{\perp\cdots\perp}_{L-m}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & L\Omega & 0 & 0 & \cdots & & & & \\ -\Omega & 0 & (L-1)\Omega & 0 & \cdots & & & & \\ 0 & -2\Omega & 0 & (L-2)\Omega & \cdots & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & \cdots & -(L-2)\Omega & 0 & 2\Omega & 0 \\ & & & & \cdots & 0 & -(L-1)\Omega & 0 & \Omega \\ & & & & \cdots & 0 & 0 & -L\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{n}^{l}_{L,0} \\ \mathsf{n}^{l}_{L,1} \\ \mathsf{n}^{l}_{L,2} \\ \vdots \\ \mathsf{n}^{l}_{L,L-2} \\ \mathsf{n}^{l}_{L,L-1} \\ \mathsf{n}^{l}_{L,L} \end{bmatrix} = 0$$

- For $m = 1, 3, \cdots$ and $m = L-1, L-3, \cdots$

$$\Rightarrow \mathsf{n}^{l}_{L,m} = 0$$

Solution of δ^0 order: parallel moments

$$
\begin{bmatrix}
0 & \psi^0 & & & \\
\tilde{\psi}^0 & 0 & \psi^1 & & \\
 & \tilde{\psi}^1 & 0 & \psi^2 & \\
 & & \tilde{\psi}^2 & 0 & \ddots \\
 & & & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\partial_{za} n_a^{0(0)} \\
\partial_{za} n_a^{1(0)} \\
\partial_{za} n_a^{2(0)} \\
\partial_{za} n_a^{3(0)} \\
\vdots
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c^0 n_a^{0(0)} \\
c^1 n_a^{1(0)} \\
c^2 n_a^{2(0)} \\
c^3 n_a^{3(0)} \\
\vdots
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 \\
g_a^1 \\
g_a^2 \\
0 \\
\vdots
\end{bmatrix}
$$

$$
+\Upsilon \ln B
\begin{bmatrix}
n_a^{0(0)} \\
n_a^{1(0)} \\
n_a^{2(0)} \\
n_a^{3(0)} \\
\vdots
\end{bmatrix}
\Leftarrow \nabla \cdot \mathbf{b} = -\partial_L \ln B
$$

Solution of δ^0 order: perpendicular moments

- $$D\mathsf{n}^{(0)} + \mathbf{b} \wedge \mathsf{n}^{(1)} = C\mathsf{n}^{(0)} + \mathsf{g}$$
  $$\Rightarrow \mathsf{n}_{\perp}^{1(1)} = -\mathbf{b} \times \left(D\mathsf{n}^{(0)} - C\mathsf{n}^{(0)} - \mathsf{g}\right)$$

- Nested flux surfaces: $\mathsf{g}_{\|} = 0 \Rightarrow \delta^1$ order equation

$$D\mathsf{n}^{(1)} + \mathbf{b} \wedge \mathsf{n}^{(2)} = C\mathsf{n}^{(1)} + \mathsf{g}^{(1)}$$

$$\partial_L \mathsf{n}_{\|}^{(1)} = C\mathsf{n}^{(1)} + \mathsf{g}^{(1)} + \partial_{\perp}\mathsf{n}_{\perp}^{(1)}$$

$$n_A^{(1)}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{AB}(z-z')g_B^{\text{eff}}(z')dz']$$